Bestimmung der Zeit des Herabfallens eines materiellen Punktes auf einigen verticalen Plancurven.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

bei

hochlöblicher philosophischer Facultät zu Marburg

eingereicht

von

Albert Bieler.

Marburg,
1884.

Herrn

Professor Dr. E. Hess

in innigster Verehrung und Dankbarkeit

gewidmet

vom

Verfasser.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554015_0064

I.

Aufstellung der Differentialgleichungen für die Zeit des Herabfallens eines materiellen Punktes längs einer beliebigen verticalen Plancurve.

Es soll ein materieller Punkt betrachtet werden, welcher nur der Schwerkraft unterliegt.

Der Punkt O (Fig. 1) werde zum Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems genommen. Die x-Axe sei vertical, die y-Axe horizontal gelegen; und zwar sollen die positiven x von oben nach unten gezählt werden. Der materielle Punkt falle auf der Curve AC von E nach G; E habe die Abscisse h, G die Abscisse x. Mit s werde der Bogen, von der x-Axe aus gezählt, bezeichnet und mit g die Beschleunigung der Schwere, welche in der Richtung der positiven x wirkt. Ihre nach den Axen geschätzten Componenten sind dann bei der Fallbewegung

$$X = g; \quad Y = 0.$$

Es gilt das Princip der lebendigen Kraft. Nach diesem ist

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = C + 2\int g\, dx.$$

Sei nun zur Bestimmung der Constanten C in dem Augenblicke, in welchem x den Wert h hat, die Geschwindigkeit Null, so ist

$$C = 0.$$

Es wird dann also

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2g \int_h^x dx;$$

und

$$(1) \qquad \sqrt{2g} \cdot dt = \frac{ds}{\sqrt{x-h}}.$$

Bezeichnet aber c den Wert der Geschwindigkeit in dem Augenblicke, in welchem x den Wert h hat, so ist offenbar

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - c^2 = 2g\,(x-h);$$

und also

$$(2) \qquad dt = \frac{ds}{\sqrt{c^2 + 2g\,(x-h)}}.$$

Die Gleichungen (1) und (2) ergeben t als Funktion von x.

Diese Formeln sind anzuwenden, wenn der Bogen EG in der Richtung der positiven x durchlaufen wird, und wenn die Schwerkraft auch in der Richtung der positiven x wirkt.

Dagegen muss man den Differentialen dt und ds verschiedene Vorzeichen geben und das Vorzeichen von g ändern, wenn die positive x-Axe nach oben gezogen wird. Für diesen Fall gehen die Formeln (1) und (2) über bezüglich in

$$\textbf{(3)} \qquad \sqrt{2g} \,.\, dt = -\frac{ds}{\sqrt{h-x}};$$

und

$$\textbf{(4)} \qquad dt = -\frac{ds}{\sqrt{c^2 + 2g\,(h-x)}}.$$

II.

Der Fall eines materiellen Punktes längs einer Parabel zweiten Grades.

1. Dieses Problem ist vor längerer Zeit von **Dr. Dienger**[1]) behandelt worden.

Es stelle (Fig. 2) AGO eine Parabel dar, deren Scheitel O ist. OF sei ihre Hauptaxe. Ein materieller Punkt falle auf der Parabel von E nach G in der Zeit t, welche gesucht werden soll.

Es sei der Bogen $OG = s$, $OF = h$ und $OH = x$. Wie stets, bedeute g die Beschleunigung der Schwere.

Dann ist nach I, 3

$$\sqrt{2g} \,.\, dt = -\frac{ds}{\sqrt{h-x}}.$$

Sei nun $y^2 = px$ die Gleichung der Parabel, so folgt leicht

$$4\sqrt{2g} \,.\, t = \int_x^h \frac{(4p + 9x)\,dx}{\sqrt{x}\,\sqrt{h-x}\,\sqrt{x+\frac{p}{4}}}.$$

Dieses Integral führt Dienger vermittelst verschiedener Umgestaltungen auf elliptische Integrale zurück.

Er kommt schliesslich auf

$$4\sqrt{2g} \,.\, t = \frac{A}{L^2}\left[\frac{E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - E(\varphi, k)}{k^3} + \frac{F(\varphi, k) - F\left(\frac{\pi}{2}, k\right)}{k} + \frac{\cos\varphi}{1-k^2}\sqrt{\frac{1 + k\sin\varphi}{1 - k\sin\varphi}}\right]$$
$$+ \frac{B}{L^2}\left[\frac{E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - E(\varphi, k)}{k^2} + \frac{k\cos\varphi}{1-k^2}\sqrt{\frac{1 + k\sin\varphi}{1 - k\sin\varphi}}\right].$$

Die einzelnen Grössen hierin sind folgendermaassen bestimmt:

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{p}}{2} + \sqrt{h + \frac{p}{4}}\right); \qquad A = \frac{p}{2}\left(\frac{\sqrt{p}}{2} - \sqrt{h + \frac{p}{4}}\right) + h\sqrt{p};$$

$$B = \frac{p}{2}\left(\frac{\sqrt{p}}{2} + \sqrt{h + \frac{p}{4}}\right) + h\sqrt{p}; \qquad k = -\frac{\left(\sqrt{h + \frac{p}{4}} - \sqrt{\frac{p}{4}}\right)^2}{h};$$

[1]) Grunert's Archiv der Mathematik und Physik. Elfter Teil. S. 88.

$$\sin\varphi = \frac{x + k'(x-h)}{x - k'(x-h)};$$

wo

$$k' = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{4h+p}}.$$

Es sei τ die Zeit, welche der Körper braucht, bis er in 0 ist. Um diese zu finden, hat man bloss $x = o$, also $\varphi = \frac{\pi}{2}$ zu setzen. Es folgt

$$4\sqrt{2g}.\tau = \frac{A}{L^2}\left[\frac{2E\left(\frac{\pi}{2},k\right)}{k^3} - \frac{2F\left(\frac{\pi}{2},k\right)}{k^2}\right] + \frac{2B}{L^2}\cdot\frac{E\left(\frac{\pi}{2},k\right)}{k^2}.$$

Um ein specielles Beispiel anzuführen, setzt Dienger $h = 2p$, und erhält für diesen Fall

$$\tau = 3{,}405\sqrt{p}.$$

Die Zeit τ_1 nun, welche ein Körper braucht, um frei durch die Höhe $2p$ zu fallen, ist

$$\tau_1 = 0{,}639\sqrt{p}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\frac{\tau}{\tau_1} = 5{,}53\ldots,$$

d. h. es würde nach Dienger die Fallzeit längs der Parabel ungefähr $5\,^1/_2$ Mal vermehrt sein.

2. In neuster Zeit ist dasselbe Problem von **Glaisher**[1]) gelöst worden.

Glaisher bemerkt, dass $\frac{\tau}{\tau_1} = 5\,^1/_2$ nach Dienger sofort beträchtlich zu gross erscheint. Dies Resultat sei auch in der Tat unrichtig und habe dies seinen Grund in einem Fehler, der bei Dienger in der Rechnung bei der Aufstellung der allgemeinen Formel für t unterlaufen ist.

Glaisher nimmt als Gleichung für die Parabel $y^2 = 4ax$. Haben t, τ und τ_1 dieselbe Bedeutung, wie bei Dienger, so ist nach Glaisher

$$t = \sqrt{\frac{2(a+h)}{g}}\,\boldsymbol{E}\left(\arccos\sqrt{\frac{x}{h}}\right)$$

$$\text{mod} = \sqrt{\frac{h}{a+h}}$$

Hieraus folgt

$$\tau = \sqrt{\frac{2(a+h)}{g}}\cdot\boldsymbol{E}'\left(\sqrt{\frac{h}{a+h}}\right);$$

worin E' das vollständige elliptische Integral zweiter Gattung bedeutet.

Weiter wird

$$\frac{\tau}{\tau_1} = \sqrt{\frac{a+h}{h}}\,\boldsymbol{E}'\left(\sqrt{\frac{h}{a+h}}\right);$$

oder

$$\frac{\tau}{\tau_1} = \frac{E'(k)}{k}; \quad k = \sqrt{\frac{h}{a+h}}.$$

[1]) Quarterly Journal of mathematics. February 1883.

Diese Formel, auf den speciellen Fall angewendet, welchen Dienger ausführt, nämlich $h = 8\,a$, liefert

$$\frac{\tau}{\tau_1} = 1,\ 1\ 8.$$

3. Wir wollen nun untersuchen, welche Entwickelung von beiden die richtige ist.

Um das festzustellen, setzen wir $p = 0$; resp. $a = 0$. Die Curve geht für diesen Fall in die x-Axe über. Es wird diejenige Formel für t von beiden vorstehenden die richtige sein, welche, in ihr $p = 0$, resp. $a = 0$ gesetzt, die Formel für t bei dem freien Falle durch die Höhe $h - x$, also

$$t = \sqrt{\frac{2\,(h-x)}{g}}$$

liefert.

a) In der Entwickelung von **Dienger** würde für $p = 0$

$$L = \tfrac{1}{2}\sqrt{h};\quad A = 0;\quad B = 0;\quad k = -1;\quad \varphi = \frac{\pi}{2};$$

woraus folgt

$$t = 0.$$

Dies Resultat zeigt, dass die von **Dienger** gefundene Formel für t, somit auch die für τ, **falsch** ist.

b) Aus der Formel von **Glaisher** würde für $a = 0$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}\,\boldsymbol{E}\left(\arccos\sqrt{\frac{x}{h}}\right);\quad \mathrm{mod} = 1;$$

oder

$$t = \sqrt{\frac{2\,(h-x)}{g}}.$$

Dies Resultat lehrt, dass die von **Glaisher** gegebene Formel für t **richtig** ist.

III.

Der Fall eines materiellen Punktes längs einer semikubischen (Neil'schen) Parabel.

$$y^2 = \frac{x^3}{p}.$$

1. Die Axe der Curve sei vertical aufwärts gerichtet.

Es stelle $A\,G\,O$ (Fig. 3) die Parabel dar, deren Axe (Tangente im Rückkehrpunkte) $O\,F$ ist; und zwar sei $O\,F$ die positive x-Axe. O sei der Coordinatenursprung. Es sei $O\,F = h$; $O\,H = x$; und es bezeichne s wieder den Bogen, von der x-Axe aus gezählt. Ein materieller Punkt falle auf der Curve von E nach G in der Zeit t, welche man bestimmen soll.

a) Die Anfangsgeschwindigkeit sei gleich Null.

Nach I, 3 ist

$$\sqrt{2g}\,.\,dt = -\frac{ds}{\sqrt{h-x}}.$$

Aus $y^2 = \frac{x^3}{p}$ folgt $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{p}}$; also $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4p+9x}{p}}$; und somit

$$\sqrt{2g}\,.\,dt = -\frac{\sqrt{4p+9x}}{2\sqrt{p\,(h-x)}}\,dx;$$

oder

$$2\sqrt{2gp}\,.\,t = \int_x^h \sqrt{\frac{4p+9x}{h-x}}\,.\,dx.$$

Um also t zu erhalten, darf man nur das letzte Integral bestimmen. Zu diesem Zwecke setze man

$$\sqrt{\frac{4p+9x}{h-x}} = z.$$

Hieraus folgt

$$dx = \frac{8p+18h}{(z^2+9)^2}\,z\,dz.$$

Mithin ist

$$\frac{\sqrt{2gp}}{4p+9h}\,t = \int_{z_0}^{z_1} \frac{z^2\,dz}{(z^2+9)^2}$$

$$z_0 = \sqrt{\frac{4p+9x}{h-x}};$$

$$z_1 = \infty\,.$$

Mit Hülfe von bekannten Reduktionsformeln aus der Integralrechnung ergiebt sich zunächst

$$\int \frac{z^2\,dz}{(z^2+9)^2} = -\frac{z}{z^2+9} + 9\int \frac{dz}{(z^2+9)^2} = -\frac{z}{2(z^2+9)} + \tfrac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2+9};$$

also

$$\int \frac{z^2\,dz}{(z^2+9)^2} = \tfrac{1}{2}\left(-\frac{z}{z^2+9} + \tfrac{1}{3}\text{ arc tang }\frac{z}{3}\right).$$

Leicht folgt

$$\frac{2\sqrt{2gp}}{4p+9h}\,t = \frac{\sqrt{(4p+9x)\,(h-x)}}{4p+9h} + \frac{\pi}{6} - \tfrac{1}{3}\text{ arc tang }\tfrac{1}{3}\sqrt{\frac{4p+9x}{h-x}}$$

und

$$2\sqrt{2gp}\,.\,t = (4p+9h)\left(\frac{\sqrt{(4p+9x)\,(h-x)}}{4p+9h} + \frac{\pi}{6} - \tfrac{1}{3}\text{ arc tang }\tfrac{1}{3}\sqrt{\frac{4p+9x}{h-x}}\right).$$

Es sei wiederum τ die Zeit, welche vergeht, bis der Punkt in O angelangt ist. Es folgt dann

$$2\sqrt{2gp}\,.\,\tau = (4p+9h)\left(\frac{2\sqrt{ph}}{4p+9h} + \frac{\pi}{6} - \tfrac{1}{3}\text{ arc tang }\tfrac{2}{3}\sqrt{\frac{p}{h}}\right).$$

Ist $h = 4p$, und braucht der Punkt, um diese Strecke frei zu durchfallen, die Zeit τ_1, so ist

$$\frac{\tau}{\tau_1} = 2,\,50\ldots$$

d. h. die Fallzeit längs der Curve ist ungefähr $2^1/_2$ Mal vermehrt.

b) Die Anfangsgeschwindigkeit sei gleich c.

Nach I, 4 ist

$$dt = -\frac{ds}{\sqrt{c^2+2g\,(h-x)}}.$$

Es folgt dann

$$2\sqrt{p}\,.\,dt = -\sqrt{\frac{4p+9x}{c^2+2g\,(h-x)}}\,dx$$

und

$$2\sqrt{p}\,.\,t = \int_x^h \sqrt{\frac{4p+9x}{c^2+2g(h-x)}}\,dx.$$

Wir substituiren

$$\sqrt{\frac{4p+9x}{c^2+2g(h-x)}} = z.$$

Hieraus ergiebt sich

$$dx = \frac{16gp+36gh}{(2gz^2+9)^2}\,z\,dz.$$

Es wird

$$\sqrt{p}\,.\,t = (8gp+18gh)\int_{z_1}^{z_h} \frac{z^2\,dz}{(2gz^2+9)^2};$$

$$z_1 = \sqrt{\frac{4p+9x}{c^2+2g(h-x)}};$$

$$z_h = \frac{1}{c}\sqrt{4p+9h}.$$

Es ist

$$\int \frac{z^2\,dz}{(2gz^2+9)^2} = -\frac{z}{4g(2gz^2+9)} + \frac{1}{12g\sqrt{2g}}\,\text{arc tang}\left(\frac{z}{3}\sqrt{2g}\right);$$

und

$$\int_{z_1}^{z_h} \frac{z^2\,dz}{(2gz^2+9)^2} = \frac{\sqrt{(4p+9x)\,[c^2+2g(h-x)]} - c\sqrt{4p+9h}}{4g(8gp+18gh+9c^2)}$$

$$+\frac{1}{12g\sqrt{2g}}\left(\text{arc tang}\frac{\sqrt{2g(4p+9h)}}{3c} - \text{arc tang}\frac{\sqrt{2g(4p+9x)}}{3\sqrt{c^2+2g(h-x)}}\right).$$

Schliesslich erhalten wir

$$2\sqrt{2gp}\,.\,t = (4p+9h)\left[\frac{\sqrt{2g(4p+9x)\,[c^2+2g(h-x)]} - c\sqrt{2g(4p+9h)}}{8gp+18gh+9c^2}\right.$$

$$\left. +\tfrac{1}{3}\left(\text{arc tang}\,\frac{1}{3c}\sqrt{2g(4p+9h)} - \text{arc tang}\,\tfrac{1}{3}\sqrt{\frac{2g(4p+9x)}{c^2+2g(h-x)}}\right)\right].$$

Haben τ und τ_1 dieselbe Bedeutung, wie bei a), so ist

$$2\sqrt{2gp}\,.\,\tau =$$

$$(4p+9h)\left[\frac{2\sqrt{2gp(c^2+2gh)} - c\sqrt{2g(4p+9h)}}{8gp+18gh+9c^2} + \tfrac{1}{3}\left(\text{arc tang}\,\frac{1}{3c}\sqrt{2g(4p+9h)} - \text{arc tang}\,\tfrac{2}{3}\sqrt{\frac{2gp}{c^2+2gh}}\right)\right].$$

Für $h = 4p$ und $c = 2\sqrt{p}$ ergiebt sich

$$\frac{\tau}{\tau_1} = 2,37$$

d. h. die Fallzeit längs der Curve ist ungefähr $2^2/_5$ Mal vermehrt.

2. Die Axe der Curve sei vertikal abwärts gerichtet.

Es stelle $A\,G\,O$ (Fig. 4) die Curve in dieser Gestalt dar. O sei wieder Coordinatenursprung und OX die positive x-Axe. s bezeichne den Bogen, von OX aus gezählt. Es sei $OF = h$, und $OH = x$. Der materielle Punkt falle von E nach G längs der Parabel in der Zeit t, die gesucht werden soll.

a) Die Anfangsgeschwindigkeit sei gleich Null.

Nach I ist

$$\sqrt{2g}\,.\,dt = \frac{ds}{\sqrt{x-h}}.$$

Wie bei 1, a) folgt

$$2\sqrt{2gp}\,.\,t = \int_h^x \sqrt{\frac{4p+9x}{x-h}}\,.\,dx.$$

Setzt man

$$\sqrt{\frac{4p+9x}{x-h}} = z;$$

so folgt

$$dx = -\frac{8p+18h}{(z^2-9)^2}\,z\,dz.$$

Mithin

$$2\sqrt{2gp}\,.\,t = (8p+18h)\int_{z_1}^{z_h} \frac{z^2\,dz}{(z^2-9)^2}$$

$$z_1 = \sqrt{\frac{4p+9x}{x-h}};$$

$$z_h = \infty\,.$$

Es ist

$$\int \frac{z^2\,dz}{(z^2-9)^2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{z}{z^2-9} + \frac{1}{6}\,l\,\frac{z-3}{z+3}\right)$$

und es wird dann

$$2\sqrt{2gp}\,.\,t = \sqrt{(4p+9x)(x-h)} - l\left(\frac{\sqrt{4p+9x}-3\sqrt{x-h}}{\sqrt{4p+9x}+3\sqrt{x-h}}\right)^{\frac{4p+9h}{6}}.$$

Beginnt der Punkt seine Bewegung in O, für welche Stelle $h = o$ ist, so ergiebt sich die Zeit τ, welche vergeht, bis der Punkt von O aus längs der Kurve in G angelangt ist,

$$2\sqrt{2gp}\,.\,\tau = \sqrt{x(4p+9x)} - l\left(\frac{\sqrt{4p+9x}-3\sqrt{x}}{\sqrt{4p+9x}+3\sqrt{x}}\right)^{\frac{2p}{3}}.$$

Ist $x = 4p$ und bedeutet τ_1 hier wieder, wie überhaupt im Folgenden stets, die Fallzeit beim freien Falle durch diese Höhe, so ergiebt sich

$$\frac{\tau}{\tau_1} = 1,89$$

d. h. die Fallzeit längs der Kurve ist ungefähr 2 Mal vermehrt.

b) Die Anfangsgeschwindigkeit sei gleich c.

Nach I, 2 ist

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{c^2+2g(x-h)}}.$$

Wie bei a) folgt dann leicht

$$2\sqrt{p}\,.\,t = \int_h^x \sqrt{\frac{4p+9x}{c^2+2g(x-h)}}\,dx.$$

Wir substituiren

$$\sqrt{\frac{4p+9x}{c^2+2g(x-h)}} = z.$$

Es ist dann

$$dx = \frac{18c^2-16gp-36gh}{(2gz^2-9)^2}\, z\,dz;$$

und weiter

$$\frac{\sqrt{p}}{9c^2-8gp-18gh}\cdot t = \int_{z_h}^{z_1} \frac{z^2\,dz}{(2gz^2-9)^2}$$

$$z_h = \frac{1}{c}\sqrt{4p+9h};$$

$$z_1 = \sqrt{\frac{4p+9x}{c^2+2g(x-h)}}.$$

Es ist

$$\int \frac{z^2\,dz}{(2gz^2-9)^2} = -\frac{1}{4g}\left(\frac{z}{2gz^2-9} + \frac{1}{6\sqrt{2g}}\, l\, \frac{z\sqrt{2g}+3}{z\sqrt{2g}-3}\right);$$

und weiter erhält man

$$4g\sqrt{p}\cdot t = \sqrt{(4p+9x)}\,[c^2+2g(x-h)] - c\sqrt{4p+9h}$$

$$+\frac{9c^2-8gp-18gh}{6\sqrt{2g}}\, l\, \frac{\sqrt{2g(4p+9x)}-3\sqrt{c^2+2g(x-h)}}{\sqrt{2g(4p+9x)}+3\sqrt{c^2+2g(x-h)}}\cdot\frac{\sqrt{2g(4p+9h)}-3c}{\sqrt{2g(4p+9h)}+3c}.$$

Um dieser für t erhaltenen Formel eine der auf S. 10 gefundenen analoge Form zu geben, dividiere man beide Seiten durch $\sqrt{2g}$. Man erhält dann

$$2\sqrt{2gp}\cdot t = \frac{1}{\sqrt{2g}}\left[\sqrt{(4p+9x)}\,[(c^2+2g(x-h)] - c\sqrt{4p+9h}\right]$$

$$-l\left\{\frac{[\sqrt{2g(4p+9x)}-3\sqrt{c^2+2g(x-h)}]\,[\sqrt{2g(4p+9h)}-3c]}{[\sqrt{2g(4p+9x)}+3\sqrt{c^2+2g(x-h)}]\,[\sqrt{2g(4p+9h)}+3c]}\right\}^{\frac{8gp+18gh-9c^2}{12g}}.$$

Es habe τ dieselbe Bedeutung, wie bei a). Dann ist

$$2\sqrt{2gp}\cdot\tau =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2g}}\left(\sqrt{(4p+9x)(c^2+2gx)}-2c\sqrt{p}\right) - l\left[\frac{(\sqrt{2g(4p+9x)}-3\sqrt{c^2+2gx})\,(2\sqrt{2gp}-3c)}{(\sqrt{2g(4p+9x)}+3\sqrt{c^2+2gx})\,(2\sqrt{2gp}+3c)}\right]^{\frac{8gp-9c^2}{12g}}$$

und für $x=4p$, und $c=2\sqrt{p}$ ergiebt sich

$$\frac{\tau}{\tau_1} = 2{,}22$$

d. h. die Fallzeit längs der Curve ist ungefähr $2\,{}^1/_5$ Mal vermehrt.

IV.

Der Fall eines materiellen Punktes längs der Curve

$$9py^2 = (x-3p)^2\,x.$$

1. Die Axe der Curve sei vertikal aufwärts gerichtet.

Es stelle OGA (Fig. 5) die Curve dar. O sei der Coordinatenursprung und OA die positive x-Axe. Es sei $OF=h$, und $OH=x$. Es bezeichne s den Bogen, in der Richtung der positiven x gezählt. Der materielle Punkt falle auf der Curve von E nach G in der Zeit t, welche bestimmt werden soll.

Die Anfangsgeschwindigkeit sei gleich Null.

Nach I, 3 ist

$$\sqrt{2g}\,dt = -\frac{ds}{\sqrt{h-x}}.$$

Aus $q\,py^2 = (x-3p)^2\,x$ folgt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-p}{2\sqrt{px}},$$

und

$$ds = \frac{x+p}{2\sqrt{px}}\,dx.$$

Mithin ist

$$2\sqrt{2g}\,.\,dt = -\frac{x+p}{\sqrt{px\,(h-x)}}\,dx;$$

und

$$2\sqrt{2gp}\,.\,t = \int_x^h \frac{x+p}{\sqrt{x\,(h-x)}}\,dx;$$

oder

$$2\sqrt{2gp}\,.\,t = p\,.\int_x^h \frac{dx}{\sqrt{x\,(h-x)}} + \int_x^h \frac{x\,dx}{\sqrt{x\,(h-x)}}.$$

Es ist

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x\,(h-x)}} = \arcsin\frac{2x-h}{h};$$

und

$$p\int_x^h \frac{dx}{\sqrt{x\,(h-x)}} = p\,.\arccos\frac{2x-h}{h};$$

ferner

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x\,(h-x)}} = -\sqrt{x\,(h-x)} + \frac{h}{2}\arcsin\frac{2x-h}{h};$$

und

$$\int_x^h \frac{x\,dx}{\sqrt{x\,(h-x)}} = \sqrt{x\,(h-x)} + \frac{h}{2}\arccos\frac{2x-h}{h}.$$

Folglich ist

$$2\sqrt{2gp}\,.\,t = \sqrt{x\,(h-x)} + \left(p+\frac{h}{2}\right)\arccos\frac{2x-h}{h};$$

oder

$$2\sqrt{2gp}\,.\,t = \sqrt{x\,(h-x)} + \left(p+\frac{h}{2}\right)\arcsin\frac{2\sqrt{x\,(h-x)}}{h}.$$

Es bezeichne τ die Zeit, welche vergeht, bis der Punkt in 0 angelangt ist Es ist dann

$$2\sqrt{2gp}\;\tau = \left(p+\frac{h}{2}\right)\pi.$$

Ist $h = 4p$, so ergiebt sich

$$\frac{\tau}{\tau_1} = 1{,}18$$

d. h. die Fallzeit längs der Curve ist ungefähr $5\,^1/_2$ Mal vermehrt.

b. Die Anfangsgeschwindigkeit sei gleich c.

Nach I, 4 ist

$$dt = -\frac{ds}{\sqrt{c^2 + 2g(h-x)}}.$$

Wie bei a) folgt leicht

$$dt = -\frac{x+p}{2\sqrt{ax}\sqrt{c^2+2g(h-x)}}\,dx;$$

und

$$2\sqrt{p}\,.\,t = -\int_h^x \frac{x+p}{\sqrt{x\,(c^2+2g\,(h-x))}}\,dx,$$

oder

$$2\sqrt{p}\,.\,t = p\int_x^h \frac{dx}{\sqrt{(2gh+c^2)\,x-2gx^2}} + \int_x^h \frac{x\,dx}{\sqrt{(2gh+c^2)\,x-2gx^2}}.$$

Es ist nun

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(2gh+c^2)\,x-2gx^2}} + \frac{1}{\sqrt{2g}}\arcsin\frac{2g\,(2x-h)-c^2}{2gh+c^2}$$

und

$$\int_x^h \frac{dx}{\sqrt{(2gh+c^2)\,x-2gx^2}} = \frac{1}{\sqrt{2g}}\left(\arcsin\frac{2gh-c^2}{2gh+c^2} - \arcsin\frac{2g\,(2x-h)-c^2}{2gh+c^2}\right);$$

ferner

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(2gh+c^2)\,x-2gx^2}} = -\frac{\sqrt{(2gh+c^2)\,x-2gx^2}}{2g} + \frac{2gh+c^2}{4g}\int \frac{dx}{\sqrt{(2gh+c^2)\,x-2gx^2}}$$

und

$$\int_x^h \frac{x\,dx}{\sqrt{(2gh+c^2)x-2gx^2}} = \frac{\sqrt{(2gh+c^2)x-2gx^2}-c\sqrt{h}}{2g} + \frac{2gh+c^2}{4g\sqrt{2g}}\left(\arcsin\frac{2gh-c^2}{2gh+c^2} - \arcsin\frac{2g(2x-h)-c^2}{2gh+c^2}\right).$$

Mithin ist

$$2\sqrt{p}\,.\,t =$$

$$\frac{\sqrt{(2gh+c^2)\,x-2gx^2}-c\sqrt{h}}{2g} + \frac{1}{4g\sqrt{2g}}(4gp+2gh+c^2)\left(\arcsin\frac{2gh-c^2}{2gh+c^2} - \arcsin\frac{2g\,(2x-h)-c^2}{2gh+c^2}\right),$$

oder

$$2\sqrt{2gp}\,.\,t = \frac{\sqrt{(2gh+c^2)\,x-2gx^2}-c\sqrt{h}}{\sqrt{2g}}$$

$$+\left(p+\frac{2gh+c^2}{4g}\right)\arcsin\frac{2\sqrt{2g}}{(2gh+c^2)^2}\left[(2gh-c^2)\sqrt{(2gh+c^2)\,x-2gx^2}-c\,(2g\,(2x-h)-c^2)\sqrt{h}\right].$$

Hat τ dieselbe Bedeutung wie bei a), so folgt

$$2\sqrt{2gp}\,.\,\tau = -c\sqrt{\frac{h}{2g}} + \left(p+\frac{2gh+c^2}{4g}\right)\arcsin\frac{2c\sqrt{2gh}}{2gh+c^2}.$$

Für $h = 4p$ und $c = 2\sqrt{p}$ ergiebt sich

$$\frac{\tau}{\tau_1} = 1{,}22\ldots$$

d. h. die Fallzeit längs der Curve ist auch hier ungefähr $1^1/_5$ Mal vermehrt.

2. Die Axe der Curve sei vertikal abwärts gerichtet.

Es stelle OGA (Fig. 6) die Curve in dieser Gestalt dar. O sei der Coordinatenursprung und OA die positive x-Axe. Es sei $OF = h$; und $OH = x$. Es bezeichne s den Bogen, in der Richtung der positiven x gezählt. Der materielle Punkt falle auf der Curve von E nach G in der Zeit t, welche man sucht.

a) Die Anfangsgeschwindigkeit sei gleich Null.

Nach I, 1 ist

$$\sqrt{2g}\,.\,dt = \frac{ds}{\sqrt{x-h}}\,.$$

Wie bei 1 folgt

$$\sqrt{2gp}\,.\,t = \int_h^x \frac{x+p}{\sqrt{x(x-h)}}\,dx\,.$$

oder

$$2\sqrt{2gp}\,.\,t = p\int_h^x \frac{dx}{\sqrt{x(x-h)}} + \int_h^x \frac{x\,dx}{\sqrt{x(x-h)}}\,.$$

Es ist

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(x-h)}} = l\left(2x-h+2\sqrt{x(x-h)}\right);$$

und

$$\int_h^x \frac{dx}{\sqrt{x(x-h)}} = p\,.\,l\,\frac{2x-h+2\sqrt{x(x-h)}}{h};$$

ferner

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x(x-h)}} = \sqrt{x(x-h)} + \frac{h}{2}\,l\left(2x-h+2\sqrt{x(x-h)}\right);$$

und

$$\int_h^x \frac{x\,dx}{\sqrt{x(x-h)}} = \sqrt{x(x-h)} + \frac{h}{2}\,l\,\frac{2x-h+2\sqrt{x(x-h)}}{h}\,.$$

Mithin ist

$$2\sqrt{2gp}\,.\,t = \sqrt{x(x-h)} + \left(p+\frac{h}{2}\right) l\,\frac{2x-h+2\sqrt{x(x-h)}}{h}\,.$$

Fällt der Punkt vom Culminationspunkte in Bezug auf die x-Axe auf der Curve die Höhe $4p$ herab, d. h. ist $h = p$ und $x = 5p$ und ist τ die hierbei verstreichende Zeit, so ist

$$2\sqrt{2gp}\,.\,\tau = \left[2\sqrt{5} + \tfrac{3}{2}\,l\,(9+4\sqrt{5})\right]p.$$

In diesem Falle ergiebt sich

$$\frac{\tau}{\tau_1} = 1{,}09$$

d. h. die Fallzeit längs der Curve ist ganz wenig vermehrt.

b) Die Anfangsgeschwindigkeit sei gleich c.

Nach I, 2 ist

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{c^2 + 2g(x-h)}}.$$

Man erhält leicht

$$2\sqrt{p}\,.\,t = \int_h^x \frac{x+p}{\sqrt{2gx^2 + (c^2 - 2gh)\,x}}\,dx$$

oder

$$2\sqrt{p}\,.\,t = p\int_h^x \frac{dx}{\sqrt{(c^2-2gh)\,x + 2gx^2}} + \int_h^x \frac{x\,dx}{\sqrt{(c^2-2gh)\,x + 2gx^2}}.$$

Es ist

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(c^2-2gh)\,x - 2gx^2}} = \frac{1}{\sqrt{2g}}\, l\left[c^2 - 2gh + 4gx + 2\sqrt{2g\,((c^2-2gh)\,x + 2gx^2)}\right];$$

$$p\int_h^x \frac{dx}{\sqrt{(c^2-2gh)\,x - 2gx^2}} - \frac{p}{\sqrt{2g}}\, l\frac{c^2 - 2gh + 4gx + 2\sqrt{2g\,[(c^2-2gh)\,x + 2gx^2]}}{(c+\sqrt{2gh})^2};$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(c^2-2gh)\,x - 2gx^2}} =$$

$$\frac{\sqrt{(c^2-2gh)\,x + 2gx^2}}{2g} - \frac{c^2-2gh}{4g\sqrt{2g}}\, l\left[c^2 - 2gh + 4gx + 2\sqrt{2g\,((c^2-2gh)\,x + 2gx^2)}\right];$$

$$\int_h^x \frac{x\,dx}{\sqrt{(c^2-2gh)\,x + 2gx^2}} =$$

$$\frac{\sqrt{(c^2-2gh)\,x + 2gx^2} - c\sqrt{h}}{2g} - \frac{c^2-2gh}{4g\sqrt{2g}}\, l\,\frac{c^2 - 2gh + 4gx + 2\sqrt{2g\,[(c^2-2gh)\,x + 2gx^2]}}{(c+\sqrt{2gh})^2}.$$

Folglich wird nun

$$2\sqrt{p}\,.\,t =$$

$$\frac{\sqrt{(c^2-2gh)\,x + 2gx^2} - c\sqrt{\ }}{2g} + \left(\frac{p}{\sqrt{2g}} - \frac{c^2-2gh}{4g\sqrt{2g}}\right) l\,\frac{c^2 - 2gh + 4gx + 2\sqrt{2g\,[(c^2-2gh)\,x + 2gx^2]}}{(c+\sqrt{2gh})^2}$$

oder

$$2\sqrt{2gp}\,.\,t =$$

$$\frac{\sqrt{(c^2-2gh)\,x + 2gx^2} - c\sqrt{h}}{\sqrt{2g}} + \left(p - \frac{c^2-2gh}{4g}\right) l\,\frac{c^2 - 2gh + 4gx + 2\sqrt{2g\,((c^2-2gh)\,x + 2gx^2)}}{(c+\sqrt{2gh})^2}.$$

Für den Fall, dass $h = p$; $x = 5p$, $c = 3\sqrt{p}$ ist und τ dieselbe Bedeutung wie in a) hat, ergiebt sich

$$\frac{\tau}{\tau_1} = 1,\,12$$

d. h. die Fallzeit längs der Kurve ist auch hier nur sehr wenig vermehrt.

V.

Der Fall eines materiellen Punktes längs einer Cartioïde.

$$r = 2p\,(1 + \cos\Theta).$$

Es werde vorausgesetzt,

die Anfangsgeschwindigkeit sei gleich Null.

1. Die Axe der Curve sei vertical aufwärts gerichtet.

Es stelle AEO (Fig. 7) die Curve dar. O sei der Pol, OA die positive x-Axe. Es bezeichne s den Bogen, in der Richtung vom Pol aus gezählt. Ferner sei $OF = h$; $OH = x$; $A\hat{O}E = \Theta$; $A\hat{O}G = \Theta'$. Der materielle Punkt falle von E nach G in der Zeit t, die gesucht wird.

Nach I. 3 ist

$$\sqrt{2g}\,.\,dt = -\frac{ds}{\sqrt{h-x}}.$$

Wir führen Polarcoordinaten ein. Es ist

$$ds = 4p\cos\frac{\Theta}{2}\,d\Theta.$$

Es wird sodann

$$\sqrt{2g}\,.\,dt = -\frac{4p\cos\dfrac{\Theta}{2}}{\sqrt{h-2p\,(1+\cos\Theta)\cos\Theta}}\,d\Theta;$$

und

$$\sqrt{2g}\;.t = -4p\int_{\Theta}^{\Theta'}\frac{\cos\dfrac{\Theta}{2}}{\sqrt{h-2p\,(1+\cos\Theta)\cos\Theta}}\,d\Theta.$$

Wir substituiren

$$\cos\frac{\Theta}{2} = \sqrt{u};$$

so wird

$$\sqrt{2g}\,.\,t = 4p\int_{\cos^2\frac{\Theta}{2}}^{\cos^2\frac{\Theta'}{2}}\frac{du}{\sqrt{h+(4p-h)\,u-12pu^2+8pu^3}}.$$

Das Integral ist ein elliptisches. Wir wollen uns zunächst mit der Reduction beschäftigen von

$$\int\frac{du}{\sqrt{h+(4p-h)\,u-12pu^2+8pu^3}}.$$

Die Wurzeln der Gleichung

$$h+(4p-h)\,u-12pu^2+8pu^3 = 0$$

sind

$$u_1 = \frac{1-\lambda}{4};$$

$$u_2 = \frac{1+\lambda}{4};$$

$$u_3 = +1;$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$\lambda = \sqrt{1 + 2\frac{h}{p}}.$$

Durch die Substitution

$$u = \frac{r + qy}{1 + y}$$

geht obiges Integral über in

$$(q - r) \int \frac{dy}{\sqrt{B(y^2 - b_1)(y^2 - b_2)}};$$

wo

$$r = u_3 - \sqrt{(u_1 - u_3)(u_2 - u_3)} = 1 - \tfrac{1}{4}\sqrt{9 - \lambda^2};$$

$$q = u_3 + \sqrt{(u_1 - u_3)(u_2 - u_3)} = 1 + \tfrac{1}{4}\sqrt{9 - \lambda^2};$$

$$B = 8p(q - u_1)(q - u_2)(q - u_3) = \frac{p}{4}(9 - \lambda^2)(3 + \sqrt{9 - \lambda^2});$$

$$b_1 = -\frac{(r - u_1)(r - u_2)}{(q - u_1)(q - u_2)} = \left(\frac{\sqrt{9 - \lambda^2} - 3}{\lambda}\right)^2;$$

$$b_2 = -\frac{r - u_3}{q - u_3} = +1.$$

Es sind B, b_1 und b_2 positive Grössen.

Substituiren wir

$$k = \sqrt{b_1}; \quad y = kz;$$

so wird

$$\int \frac{du}{\sqrt{h + (4p - h)u - 12pu^2 + 8pu^3}} = \frac{1}{2\sqrt{p(3 + \sqrt{9 - \lambda^2})}} \int \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}.$$

Setzen wir nun noch

$$z = \sin\varphi;$$

so wird endlich

$$\sqrt{2g} \cdot t = 2\sqrt{\frac{p}{3 + \sqrt{9 - \lambda^2}}} \int_{\varphi}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

wo

$$\lambda = \sqrt{1 + 2\frac{h}{p}}; \quad \Delta\varphi = \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}; \quad k = \frac{\sqrt{9 - \lambda^2} - 3}{\lambda};$$

$$\varphi = \arcsin \frac{\lambda}{\sqrt{9 - \lambda^2} - 3} \cdot \frac{\sqrt{9 - \lambda^2} - 4\sin^2\frac{\Theta}{2}}{\sqrt{9 - \lambda^2} + 4\sin^2\frac{\Theta}{2}};$$

$$\varphi_1 = \arcsin \frac{\lambda}{\sqrt{9 - \lambda^2} - 3} \cdot \frac{\sqrt{9 - \lambda^2} - 4\sin^2\frac{\Theta'}{2}}{\sqrt{9 - \lambda^2} + 4\sin^2\frac{\Theta'}{2}}.$$

2. Die Axe der Curve sei vertical abwärts gerichtet.

Es stelle OEA (Fig. 8) die Kurve in dieser Gestalt dar. O sei wieder der Pol und OA die positive x-Axe. Es bezeichne s den Bogen, vom Pol aus gezählt. Es sei $OF = h$; und $OH = x$; ferner sei $A\hat{O}E = \Theta$; und $A\hat{O}G = \Theta'$. Der materielle Punkt falle längs der Kurve von E nach G in der Zeit t, welche gesucht wird.

Nach I, 1 ist

$$\sqrt{2g} \,.\, dt = \frac{ds}{\sqrt{x-h}};$$

Wie bei 1. folgt

$$\sqrt{2g} \,.\, t = -4p \int_{\cos^2\frac{\Theta}{2}}^{\cos^2\frac{\Theta'}{2}} \frac{du}{\sqrt{-[h+(4p-h)\,u-12pu^2+8pu^3]}}$$

und weiter

$$\int \frac{du}{\sqrt{-[h+(4p-h)\,u-12pu^2+8pu^3]}} = (q-r)\int \frac{dy}{\sqrt{B\,(y^2-b_1)\,(y^2-b_2)}}$$

q, r, B, b_1 und b_2 haben die unter 1. angegebenen Werte, nur ist B negativ. Setzen wir

$$b_1 = +\alpha^2;$$
$$B = -\gamma^2;$$

so wird, wenn wir noch substituiren

$$k = \sqrt{1-\alpha^2}; \quad y = \frac{\alpha}{\sqrt{1-k^2z^2}}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{-[h+(4p-h)\,u-12pu^2+8pu^3]}} = \frac{1}{2\sqrt{p\,(3+\sqrt{9-\lambda^2})}} \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\,(1-k^2z^2)}};$$

Substituiren wir ferner

$$z = \sin\varphi;$$

so wird endlich

$$\sqrt{2g} \,.\, t = 2\sqrt{\frac{p}{3+\sqrt{9-\lambda^2}}} \int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

wo

$$\lambda = \sqrt{1+2\frac{h}{p}}; \quad \Delta\varphi = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}; \quad k = \frac{\sqrt{\lambda^2-(\sqrt{9-\lambda^2}-3)^2}}{\lambda^2};$$

$$\varphi_1 = \text{arc sin}\, \frac{\sqrt{\left(r-\cos^2\frac{\Theta'}{2}\right)^2-\alpha^2\left(q-\cos^2\frac{\Theta'}{2}\right)^2}}{k\left(r-\cos^2\frac{\Theta'}{2}\right)};$$

$$\varphi = \text{arc sin}\, \frac{\sqrt{\left(r-\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^2-\alpha^2\left(q-\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^2}}{k\left(r-\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)};$$

Die Grössen r, q und α haben die unter 1. angegebenen Werte.

VI.

Der Fall eines materiellen Punktes längs der Curve

$$y^2 = \frac{x^5}{p^3}.$$

Es werde wieder vorausgesetzt,

die Anfangsgeschwindigkeit sei gleich Null.

1. Die Axe der Curve sei vertical aufwärts gerichtet.

Es stelle AEO (Fig. 9) die Curve dar. O sei der Coordinatenursprung, OX die positive x-Axe. Es sei $OF = h$, $OH = x$, und es bezeichne s den Bogen, von der x-Axe aus gezählt. Der materielle Punkt falle längs der Curve von E nach G in der Zeit t, welche gesucht werden soll.

a. Nach I, 3 ist

$$\sqrt{2g} \cdot dt = -\frac{ds}{\sqrt{h-x}}.$$

Aus der Gleichung der Curve $y^2 = \frac{x^5}{p^3}$ folgt

$$\frac{dy}{dx} = \tfrac{5}{2}\sqrt{\frac{x^3}{p^3}};$$

also

$$ds = \frac{1}{2p\sqrt{p}} \cdot \sqrt{4p^3 + 25x^3} \cdot dx,$$

folglich

$$\sqrt{2g} \cdot dt = -\frac{1}{2p\sqrt{p}} \cdot \sqrt{\frac{4p^3 + 25x^3}{h-x}} \cdot dx;$$

und

$$2p\sqrt{2gp} \cdot t = \int_x^h \frac{4p^3 + 25x^3}{\sqrt{(h-x)(4p^3 + 25x^3)}} \cdot dx;$$

oder

$$2p\sqrt{2gp} \cdot t = 4p^3 \int_x^h \frac{dx}{\sqrt{(h-x)(4p^3 + 25x^3)}} + 25 \int_x^h \frac{x^3 dx}{\sqrt{(h-x)(4p^3 + 25x^3)}}.$$

b. Reduktion des Integrals

$$\int_x^h \frac{dx}{\sqrt{(h-x)(4p^3 + 25x^3)}}.$$

Wir betrachten zunächst das allgemeine Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(h-x)(4p^3 + 25x^3)}}.$$

Als Wurzeln der Gleichung

$$(h-x)(4p^3 + 25x^3) = 0$$

ergeben sich

$$x_1 = \frac{\lambda}{2}\,(1 + i\sqrt{3})\,;$$
$$x_2 = \frac{\lambda}{2}\,(1 - i\sqrt{3})\,;$$
$$x_3 = h\,;$$
$$x_4 = -\lambda\,;$$

wo $\lambda = p\sqrt[3]{\frac{4}{25}}$ ist.

Substituirt man in dem Integrale

$$x = \frac{r + qy}{1 + y}\,,$$

so wird

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-25\,(x-x_1)\,(x-x_2)\,(x-x_3)\,(x-x_4)}} = (q-r)\int \frac{dy}{\sqrt{B\,(y^2-b_1)\,(y^2-b_2)}}\,.$$

Die einzelnen Grössen sind hier bestimmt durch die Gleichungen:

$$b_1 = -\frac{(r-x_1)\,(r-x_2)}{(q-x_1)\,(q-x_2)}\,;$$
$$b_2 = -\frac{(r-x_3)\,(r-x_4)}{(q-x_3)\,(q-x_1)}\,;$$
$$B = -25\,(q-x_1)\,(q-x_2)\,(q-x_3)\,(q-x_4).$$
$$r = s + t\,;$$
$$q = s - t\,;$$
$$s = \frac{x_1\,x_2 - x_3\,x_4}{x_1 + x_2 - (x_3 + x_4)}\,;$$
$$t = \frac{\sqrt{(x_1-x_3)\,(x_1-x_4)\,(x_2-x_3)\,(x_2-x_4)}}{x_1 + x_2 - (x_3 + x_4)}\,.$$

Setzt man für x_1, x_2, x_3 und x_4 die oben angegebenen Werte ein, so folgt

$$s = \lambda\,\frac{\lambda + h}{2\lambda - h}\,;$$
$$t = \frac{\lambda}{2\lambda - h}\sqrt{3\,(\lambda^2 - \lambda h + h^2)}\,.$$

Setzt man im Folgenden noch zur Abkürzung

$$\sqrt{3\,(\lambda^2 - \lambda h + h^2)} = M\,;$$

so folgt weiter

$$r = \frac{\lambda}{2\lambda - h}\,(\lambda + h + M)\,;$$
$$q = \frac{\lambda}{2\lambda - h}\,(\lambda + h - M)\,;$$

und also

$$b_1 = -\frac{2M + 3h}{2M - 3h}\,;$$
$$b_2 = \left(\frac{M + 3\lambda}{M - 3\lambda}\right)^2\,;$$
$$B = \frac{25\lambda^3\,M^2}{3\,(2\lambda - h)^4}\,(M - 3\lambda)^2\,(2M - 3h)\,.$$

Die Grössen B, b_1 und b_2 sind auf ihre Vorzeichen zu prüfen. Wir finden, dass B und b_2 positiv, b_1 dagegen negativ ist. Es sei

$$B = + \gamma^2;$$
$$b_1 = - \alpha^2;$$
$$b_2 = + \beta^2.$$

Es geht sodann über

$$\int \frac{dy}{\sqrt{B\,(y^2 - b_1)\,(y^2 - b_2)}} \quad \text{in} \quad \int \frac{dy}{\sqrt{\gamma^2\,(y^2 + \alpha^2)\,(y^2 - \beta)^2}}.$$

Wir benutzen die Substitution

$$k = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}; \quad \text{und} \quad y = \frac{\beta}{\sqrt{1 - z^2}}.$$

Es wird alsdann

$$\int \frac{dy}{\sqrt{\gamma^2\,(y^2 + \alpha^2)\,(y^2 - \beta^2)}} = \frac{1}{\gamma\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \int \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)\,(1 - k^2 z^2)}}.$$

Somit ist nun

$$\frac{dx}{\sqrt{(h - x)\,(4p^3 + 25x^3)}} = \frac{q - r}{\gamma\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \int \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)\,(1 - k^2 z^2)}};$$

oder, wenn wir noch setzen

$$z = \sin\varphi; \quad \text{und} \quad \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} = \Delta\varphi;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(h - x)\,(4p^3 + 25x^3)}} = \frac{q - r}{\gamma\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Führen wir noch die Legendre'sche Bezeichnung

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = F\,(k, \varphi)$$

ein, so wird

$$\int_x^h \frac{dx}{\sqrt{(h - x)\,(4p^3 + 25x^3)}} = - \frac{q - r}{\gamma\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\, F\,(k, \varphi),$$

wo

$$k = \frac{M - 3\lambda}{2\sqrt{M\,(2M - 3h)}};$$

$$\varphi = \arcsin \sqrt{1 - \left(\frac{M + 3\lambda}{M - 3\lambda}\right) \cdot \left(\frac{q - x}{r - x}\right)^2}.$$

c. Zerlegung des Integrals

$$\int_x^h \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(h - x)\,(4p^3 + 25x^3)}}.$$

Wir wenden die auf Seite 21 angegebene Substitution für x wieder an. Dann wird

$$x^3 = \frac{(r^3 + 3rq^2y^2) + (3r^2q + q^3y^2)\,y}{(1 + 3y^2) + (3 + y^2)\,y};$$

Zähler und Nenner multiplicirt mit

$$(1 + 3y^2) - (3 + y^2)\,y$$

giebt

$$x^3 = \frac{1}{(1-y^2)^3}\,(r^3 + 3r\,(q^2 + r^2 - 3rq)\,y^2 - 3q\,(q^2 + r^2 - 3rq)\,y^4 - q^3y^6)$$
$$+ \frac{1}{(1-y^2)^3}\,(3r^2\,(q-r) + (q^3 - r^3 + 9r^2q - 9rq^2)\,y^2 + 3q^2\,(q-r)\,y^4)\,y.$$

Zur Abkürzung setze man einstweilen

$$q^2 + r^2 - 3rq = D.$$

Es ist dann

$$x^3 = \frac{1}{(1-y^2)^3}\,(r^3 + 3rDy^2 - 3qDy^4 - q^3y^6) + \frac{q-r}{(1-y^2)^3}\,(3r^2 + ((q-r)^2 - 6rq)\,y^2 + 3q^2y^4)\,y.$$

Folglich ist

$$\int_x^h \frac{x^3dx}{\sqrt{(h-x)\,(4p^3 + 25x^3)}}$$

$$= (q-r\int_x^h \frac{r^3 + 3rDy^2 - 3qDy^4 - q^3y^6}{(1-y^2)^3\sqrt{B(y^2-b_1)\,(y^2-b_2)}}\,dy + (q-r)^2\int_x^h \frac{3r^2 + ((q-r)^2 - 6rq)\,y^2 + 3q^2y^4}{(1-y^2)^3\sqrt{B\,(y^2-b_1)\,(y^2-b_2)}}\,ydy.$$

d. Auflösung des Integrals

$$\int_x^h \frac{3r^2 + ((q-r)^2 - 6rq)\,y^2 + 3q^2y^4}{(1-y^2)^3\sqrt{B\,(y^2-b_1)\,(y^2-b_2)}}\,ydy.$$

Wir fassen zunächst wieder das allgemeine Integral in's Auge, welches wir kurz mit P bezeichnen wollen. Wir substituiren darin

$$y^2 = 1 - u.$$

Dann wird

$$2P\sqrt{B} = -\int \frac{4\,(r-q)^2 - (r^2 + 7q^2 - 8rq)\,u + 3q^2u^2}{u^3\sqrt{a + bu + u^2}}\,du;$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$b_1b_2 - (b_1 + b_2 - 1 = a;$$
$$b_1 + b_2 - 2 = b.$$

Weiter werde im Folgenden einstweilen noch zur Abkürzung gesetzt

$$\sqrt{a + bu + u^2} = \sqrt{T}.$$

Es folgt sofort

$$2P\sqrt{B} = 4\,(-r^2 - q^2 + 2rq)\int \frac{du}{u^3\sqrt{T}} + (r^2 + 7q^2 - 8rq)\int \frac{du}{u^2\sqrt{T}} - 3q^2\int \frac{du}{u\sqrt{T}}.$$

Nach einer Reductionsformel aus der Integralrechnung ist

$$\int \frac{du}{u^3\sqrt{T}} = -\frac{2a - 3bu}{4a^2u^2}\sqrt{T} + \frac{3b^2 - 4a}{8a^2}\int \frac{du}{u\sqrt{T}};$$

$$\int \frac{du}{u^2\sqrt{T}} = -\frac{\sqrt{T}}{au} - \frac{b}{2a}\int \frac{du}{u\sqrt{T}}.$$

Es wird nun

$$2P\sqrt{B} =$$

$$\left(-3q^2-\frac{b}{2a}(r^2+7q^2-8rq)-\frac{3b^2-4a}{2a^2}(r-q)^2\right)\int\frac{du}{u\sqrt{T}}-\sqrt{T}\left(\frac{r^2+7q^2-8rq}{au}-\frac{(2a-3bu)(r-q)^2}{a^2u^2}\right),$$

oder

$$2P\sqrt{B} = \frac{1}{2a^2}\left((4a-3b^2)(r-q)^2-ab(r^2+7q^2-8rq)-6a^2q^2\right)\int\frac{du}{u\sqrt{T}}$$
$$-\frac{1}{a^2}\left(3b(r-q)^2+a(r^2+7q^2-8rq)\right)\frac{\sqrt{T}}{u}+\frac{2(r-q)^2}{a}\frac{\sqrt{T}}{u^2}.$$

Da in dem vorliegenden Falle

$$a < o$$

ist, so ist

$$\int\frac{du}{u\sqrt{T}} = \int\frac{du}{u\sqrt{a+bu+u^2}} = \frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{2a+bu}{u\sqrt{b^2-4a}}.$$

Folglich ist nun

$$P = \frac{1}{4a^2\sqrt{-aB}}\left((4a-3b^2)(r-q)^2-ab(r^2+7q^2-8rq)-6a^2q^2\right)\arcsin\frac{2a+bu}{u\sqrt{b^2-4a}}$$
$$-\frac{1}{2a^2\sqrt{B}}\left(3b(r-q)^2+a(r^2+7q^2-8rq)\right)\cdot\frac{\sqrt{a+bu+u^2}}{u}+\frac{1}{a\sqrt{B}}(r-q)^2\frac{\sqrt{a+bu+u^2}}{u^2}.$$

Die Grenzen für das bestimmte Integral in Bezug auf die neu eingeführte Variabele u erhält man als

$$\text{untere Grenze}\quad u = 1-\left(\frac{r-x}{q-x}\right)^2;$$
$$\text{obere Grenze}\quad u = 1-b_2.$$

Es wird

$$\int_x^h\frac{3r^2+[(q-r)^2-6rq]y^2+3q^2y^4}{(1-y^2)^3\sqrt{B(y^2-b_1)(y^2-b_2)}}ydy$$
$$= \frac{1}{4a^2\sqrt{-aB}}\left[(4a-3b^2)(r-q)^2-ab(r^2+7q^2-8rq)-6a^2q^2\right]\arccos\frac{(2a+b)(q-x)^2-b(r-x)^2}{\sqrt{b^2-4a\left[(q-x)^2-(r-x)^2\right]}}$$
$$+\frac{1}{a\sqrt{B}}\left(\frac{3b(r-q)^2+a(r^2+7q^2-8rq)}{2a}-\frac{(r-q)^2(q-x)^2}{(q-x)^2-(r-x)^2}\right)\cdot\frac{\sqrt{(a+b+1)(q-x)^4-(b+2)(q-x)^2(r-x)^2+(r-x)^4}}{(q-x)^2-(r-x)^2}$$

oder auch

$$\int_x^h\frac{3r^2+[(q-r)^2-6rq]y^2+3q^2y^4}{(1-y^2)^3\sqrt{B(y^2-b_1)(y^2-b_2)}}ydy$$
$$= \frac{1}{4a^2\sqrt{-aB}}\left[(4a-3b^2)(r-q)^2-ab(r^2+7q^2-8rq)-6a^2q^2\right]\arccos\frac{(2b_1b_2-b_1-b_2)(q-x)^2-(b_1+b_2-2)(r-x)^2}{(b_2-b_1)\left[(q-x)^2-(r-x)^2\right]}$$
$$-\frac{1}{a\sqrt{B}}\left(\frac{3b(r-q)^2+a(r^2+7q^2-8rq)}{2a}-\frac{(r-q)^2(q-x)^2}{(q-x)^2-(r-x)^2}\right)\cdot\frac{\sqrt{b_1b_2(q-x)^4-(b_1+b_2)(r-x)^2(q-x)^2+(r-x)^4}}{(q-x)^2-(r-x)^2}.$$

e. Reduktion des Integrals

$$\int_x^h \frac{r^3 + 3rDy^2 - 3qDy^4 - q^3y^6}{(1-y^2)^3\sqrt{B(y^2-b_1)(y^2-b_2)}}\,dy.$$

Wir betrachten zunächst wieder das allgemeine Integral, welches mit R bezeichnet sein möge. Wir gestalten dieses um zu

$$R = \int \left[q^3 + \frac{(r^3-q^3) + 3(rD+q^3)y^2 - 3q(D+q^2)y^4}{(1-y^2)^3}\right] \frac{dy}{\sqrt{B(y^2-b_1)(y^2-b_2)}}.$$

Wir benutzen die frühere Substitution; nämlich

$$k = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}; \text{ und } y = \frac{\beta}{\sqrt{1-z^2}};$$

dann wird

$$1-y^2 = \frac{1-\beta^2}{1-z^2}\left(1 - \frac{1}{1-\beta^2}\,z^2\right).$$

Zur Abkürzung sei noch

$$-\frac{1}{1-\beta^2} = \varepsilon; \text{ und } \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)} = \sqrt{Z}.$$

Es wird

$$R = \frac{1}{\gamma\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\left[q^3\int\frac{dz}{\sqrt{Z}} + \frac{r^3-q^3}{(1-\beta^2)^3}\int\frac{(1-z^2)^3\,dz}{(1+\varepsilon z^2)^3\sqrt{Z}}\right.$$
$$\left. + \frac{3\beta^2(rD+q^3)}{(1-\beta^2)^3}\int\frac{(1-z^2)^2\,dz}{(1+\varepsilon z^2)^3\sqrt{Z}} - \frac{3\beta^4(qD+q^3)}{(1-\beta^2)^3}\int\frac{(1-z^2)\,dz}{(1+\varepsilon z^2)^3\sqrt{Z}}\right].$$

Es ist nun

$$\frac{z^2}{(1+\varepsilon z^2)^3} = \frac{1}{\varepsilon(1+\varepsilon z^2)^3} + \frac{1}{\varepsilon(1+\varepsilon z^2)^2};$$

und

$$\frac{z^4}{(1+\varepsilon z^2)^3} = \frac{1}{\varepsilon^2(1+\varepsilon z^2)^3} - \frac{2}{\varepsilon^2(1+\varepsilon z^2)^2} + \frac{1}{\varepsilon^2(1+\varepsilon z^2)}.$$

Diese Werte in die letzte Formel für R und zugleich in ihr für D den früheren Wert eingesetzt, giebt

$$R\gamma\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = r^3\int\frac{dz}{\sqrt{Z}} - 3\varepsilon\beta^2(2r^3-3r^2q+rq^2)\int\frac{dz}{(1+\varepsilon z^2)\sqrt{Z}}$$
$$+ 3\varepsilon^2\beta^4(3r^3-7r^2q+5rq^2-q^3)\int\frac{dz}{(1+\varepsilon z^2)^2\sqrt{Z}} - 4\varepsilon^3\beta^6(r-q)^3\int\frac{dz}{(1+\varepsilon z^2)^3\sqrt{Z}}.$$

Wir substituiren

$$Z = \sin\varphi; \text{ und } \Delta\varphi = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi};$$

ferner setzen wir zur Abkürzung

$$3\varepsilon\beta^2(2r^3-3r^2q+rq^2) = G;$$
$$3\varepsilon^2\beta^4(3r^3-7r^2q+5rq^2-q^3) = H;$$
$$4\varepsilon^3\beta^6(r-q)^3 = I.$$

Sodann ist

$$R\gamma\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = r^3\int\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - G\int\frac{d\varphi}{(1+\varepsilon\sin^2\varphi)\Delta\varphi} + H\int\frac{d\varphi}{(1+\varepsilon\sin^2\varphi)^2\Delta\varphi} - I\int\frac{d\varphi}{(1+\varepsilon\sin^2\varphi)^3\Delta\varphi}.$$

Im Folgenden führen wir nachstehende Bezeichnungen ein

$$\int \frac{1+\varepsilon\sin^2\varphi}{\Delta\varphi}\cdot d\varphi = V_{-1};$$

$$\int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = V_0;$$

$$\int \frac{d\varphi}{(1+\varepsilon\sin^2\varphi)\,\Delta\varphi} = V_1;$$

und allgemein

$$\int \frac{d\varphi}{(1+\varepsilon\sin^2\varphi)^2\,\Delta\varphi} = V_n.$$

Es lassen sich nun die Integrale

$$\int \frac{d\varphi}{(1+\varepsilon\sin^2\varphi)^2\,\Delta\varphi} = V_2;$$

und

$$\int \frac{d\varphi}{(1+\varepsilon\sin^2\varphi)^3\,\Delta\varphi} = V_3$$

ausdrücken durch V_{-1}, V_0 und V_1.

Um dies zu erreichen, benutzen wir die Reduktionsformel

$$\frac{\sin\varphi\cos\varphi\,\Delta\varphi}{(1+\varepsilon\sin^2\varphi)^{n-1}} = \delta_3 V_{n-3} + \delta_2 V_{n-2} + \delta_1 V_{n-1} + \delta_0 V_n.$$

Die Werte der mit δ bezeichneten Coefficienten sind hier

$$\delta_3 = -(2n-5)\,\frac{k^2}{\varepsilon^2};$$

$$\delta_2 = (2n-4)\left(\frac{1+k^2}{\varepsilon} + 3\,\frac{k^2}{\varepsilon^2}\right);$$

$$\delta_1 = -(2n-3)\left(1 + 2\,\frac{1+k^2}{\varepsilon} + 3\,\frac{k^2}{\varepsilon^2}\right);$$

$$\delta_0 = (2n-2)\left(1 + \frac{1+k^2}{\varepsilon} + \frac{k^2}{\varepsilon^2}\right).$$

Zur Abkürzung werde weiter noch gesetzt

$$1 + \frac{1+k^2}{\varepsilon} + \frac{k^2}{\varepsilon^2} = \varrho;$$

$$1 + 2\,\frac{1+k^2}{\varepsilon} + 3\,\frac{k^2}{\varepsilon^2} = \sigma;$$

$$1 + \frac{1+k^2}{\varepsilon} + 3\,\frac{k^2}{\varepsilon^2} = \tau.$$

Für $n = 2$ wird dann

$$V_2 = \frac{\sin\varphi\cos\varphi\,\Delta\varphi}{2\varrho\,(1+\varepsilon\sin^2\varphi)} - \frac{k^2}{2\varrho\,\varepsilon^2}\,V_{-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sigma}{\varrho}\,V_1.$$

Für $n = 3$ wird

$$V_3 = \frac{\sin\varphi\cos\varphi\,\Delta\varphi}{4\varrho\,(1+\varepsilon\sin^2\varphi)}\left(\frac{1}{1+\varepsilon\sin^2\varphi)} + \frac{3}{2}\cdot\frac{\sigma}{\varrho}\right) + \frac{1}{4\varrho}\,\frac{k^2}{\varepsilon^2}\,V_0 + \frac{3\sigma^2 - 4\varrho\tau}{8\varrho^2}\,V_1 - \frac{3}{8}\,\frac{\sigma}{\varrho^2}\,\frac{k^2}{\varepsilon^2}\,V_{-1}.$$

Setzt man diese Werte in die letzte Formel für R

$$R\gamma\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = r^3 V_0 - G V_1 + H V_2 - I V_3$$

ein, so erhält man

$$R\gamma\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \frac{\sin\varphi\cos\varphi\,\Delta\varphi}{4\varrho(1+\varepsilon\sin^2\varphi)}\left(2H-\frac{2\varrho+3\sigma(1+\varepsilon\sin^2\varphi)}{2\varrho(1+\varepsilon\sin^2\varphi)}I\right)+\left(r^3-\frac{1}{4\varrho}\frac{k^2}{\varepsilon^2}I\right)V_0$$
$$-\left(G-\frac{1}{2}\frac{\sigma}{\varrho}H+\frac{3\sigma^2-4\varrho\tau}{8\varrho^2}\right)V_1-\left(\frac{1}{2\varrho}\frac{k^2}{\varepsilon^2}H-\frac{3}{8}\frac{\sigma}{\varrho^2}\frac{k^2}{\varepsilon^2}I\right)V_{-1}.$$

Es ist nun

$$V_{-1} = \int\frac{1+\varepsilon\sin^2\varphi}{\Delta\varphi}\,d\varphi = \int\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}+\varepsilon\int\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\Delta\varphi} = V_0+\frac{\varepsilon}{k^2}(V_0-\int\Delta\varphi\,d\varphi)$$

oder

$$V_{-1} = \left(1+\frac{\varepsilon}{k^2}\right)V_0-\frac{\varepsilon}{k^2}\int\Delta\varphi\,.\,d\varphi.$$

Unter Berücksichtigung dieser Formel wird dann

$$R\gamma\sqrt{\alpha^2+\beta^2} =$$
$$\frac{\sin\varphi\cos\varphi\Delta\varphi}{4\varrho(1+\varepsilon\sin^2\varphi)}\left[2H-\left(\frac{1}{1+\varepsilon\sin^2\varphi}+\frac{3}{2}\frac{\sigma}{\varrho}\right)I\right]-\left[r^3-\frac{\varepsilon+k^2}{2\varrho\varepsilon^2}H-\frac{1}{2\varrho}\frac{k^2}{\varepsilon^2}\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\frac{\sigma}{\varrho}-\frac{3}{4}\frac{\sigma}{\varrho}\frac{\varepsilon}{k^2}\right)I\right]V_o$$
$$+\frac{1}{2\varrho\varepsilon}\left(H-\frac{3}{4}\frac{\sigma}{\varrho}I\right)\int\Delta\varphi\,.\,d\varphi-\left(G-\frac{1}{2}\frac{\sigma}{\varrho}H+\frac{3\sigma^2-4\varrho\tau}{8\varrho^2}I\right)V_1.$$

Es mögen schliesslich noch die Legendre'schen Bezeichnungen

$$\int_o^\varphi\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = F(k,\varphi);\quad \int_o^\varphi\Delta\varphi\,.\,d\varphi = E(k,\varphi);\quad \int_o^\varphi\frac{d\varphi}{1+\varepsilon\sin^2\varphi} = \Pi(k,\varepsilon,\varphi)$$

eingeführt werden. Dann ist

$$\int_x^h\frac{r^3+3rDy^2-3qDy^4-q^3y^6}{(1-y^2)^3\sqrt{(y^2-b_1)(y^2-b_2)}}\,dy = \frac{1}{\gamma\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\left\{\frac{\sin\varphi\cos\varphi\Delta\varphi}{4\varrho(1+\varepsilon\sin^2\varphi)}\left[\left(\frac{1}{1+\varepsilon\sin^2\varphi}+\frac{3}{2}\frac{\sigma}{\varrho}\right)I-2H\right]\right.$$
$$+\left[r^3-\frac{\varepsilon+k^2}{2\varrho\varepsilon^2}H-\frac{1}{2\varrho}\cdot\frac{k^2}{\varepsilon^2}\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\frac{\sigma}{\varrho}-\frac{3}{4}\frac{\sigma}{\varrho}\frac{\varepsilon}{k^2}\right)I\right]F(k,\varphi)$$
$$\left.-\frac{1}{2\varrho\varepsilon}\left(H-\frac{3}{4}\cdot\frac{\sigma}{\varrho}I\right)E(k,\varphi)+\left(G-\frac{1}{2}\frac{\sigma}{\varrho}H+\frac{3\sigma^2-4\varrho\tau}{8\varrho^2}I\right)\Pi(k,\varepsilon,\varphi)\right\}.$$

f. Aufstellung der Endformel für t.

Aus den bisher gewonnenen Resultaten erhalten wir nun das Gesamtresultat:

$$2p\sqrt{2gp}\,.\,t$$
$$=\frac{25(q-r)^2}{a\sqrt{B}}\left(\frac{(r-q)^2(q-x)^2}{(q-x)^2-(r-x)^2}-\frac{3b(r-q)^2+a(r^2-8rq+7q^2)}{2a}\right)\frac{\sqrt{b_1b_2(q-x)^4-(b_1+b_2)(r-x)^2(q-x)^2-(r-x)^4}}{(q-x)^2-(r-x)^2}$$
$$-\frac{25(q-r)\sin\varphi\cos\varphi\Delta\varphi}{4\varrho\sqrt{B(b_2-b_1)}\,.\,(1+\varepsilon\sin^2\varphi)}\cdot\left[2H-\left(\frac{1}{1+\varepsilon\sin^2\varphi}+\frac{3}{2}\cdot\frac{\sigma}{\varrho}\right)I\right]$$
$$+\frac{25(q-r)^2}{4a^2\sqrt{-aB}}\left[(4a-3b^2)(r-q)^2-ab(r^2-8rq+7q^2)-6a^2q^2\right]\arccos\frac{(2b_1b_2-b_1-b_2)(q-x)^2-(b_1+b_2-2)(r-x)^2}{(b_1-b)[(q-x)^2-(r-x)^2]}$$
$$-\frac{q-r}{\sqrt{B(b_2-b_1)}}\left[4p^3-25\left(r^3-\frac{\varepsilon+k^2}{2\varrho\varepsilon^2}\right)H-\frac{1}{2\varrho}\frac{k^2}{\varepsilon^2}\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\frac{\sigma}{\varrho}-\frac{3}{4}\frac{\sigma}{\varrho}\frac{\varepsilon}{k^2}\right)I\right]F(k,\varphi)$$
$$-\frac{25(q-r)}{2\varrho\varepsilon\sqrt{B(b_2-b_1)}}\left(H-\frac{3}{4}\frac{\sigma}{\varrho}I\right)E(k,\varphi)+\frac{25(q-r)}{\sqrt{B(b_2-b_1)}}\left(G-\frac{1}{2}\frac{\sigma}{\varrho}H+\frac{3\sigma^2-4\varrho\,.\,\tau}{8\varrho^2}\right)\Pi(k,\varepsilon,\varphi).$$

Es ist hier

$$k = \frac{M - 3\lambda}{2\sqrt{M(2M - 3h)}};$$

$$\varepsilon = \frac{1}{12\lambda M}(M - 3\lambda)^2;$$

$$\varphi = \arcsin\sqrt{1 - \left(\frac{M + 3\lambda}{M - 3\lambda}\right)^2 \left(\frac{q - x}{r - x}\right)^2}.$$

Die sonst in der Formel vorkommenden Konstanten haben die während der Entwickelungen angegebenen Werte.

2. Die Axe der Curve sei vertikal aufwärts gerichtet.

Es stelle AEO (Fig. 10) die Curve dar in dieser Gestalt. O sei der Coordinatenursprung; OX die positive x-Axe. Es sei $OF = h$; $OH = x$ und es bezeichne s den Bogen, von der x-Axe aus gezählt. Der materielle Punkt falle längs der Curve von E nach G in der Zeit t, welche gesucht werden soll.

Nach I ist

$$\sqrt{2g} \cdot dt = \frac{ds}{\sqrt{x - h}};$$

Für ds den Wert von 1, a gesetzt, giebt

$$\sqrt{2g} \cdot dt = \frac{1}{2p\sqrt{p}} \sqrt{\frac{4p^3 + 25x^3}{x - h}} \cdot dx;$$

also

$$2p\sqrt{2gp} \cdot t = \int_h^x \frac{4p^3 + 25x^3}{\sqrt{(x - h)(4p^3 + 25x^3)}}\, dx;$$

oder

$$2p\sqrt{2gp} \cdot t = -4p^3 \int_x^h \frac{dx}{\sqrt{(x - h)(4p^3 + 25x^3)}} - 25 \int_x^h \frac{x^3 dx}{\sqrt{(x - h)(4p^3 + 25x^3)}}.$$

Es ist leicht einzusehen, dass wir zu derselben Endformel für t gelangen, wie bei 1. Es haben jedoch in derselben in diesem Falle die Grössen k und φ andere Werte. Dies rührt daher, dass hier die Grösse $\sqrt{B}$ negativ ist, weshalb auch wiederum zur Reduktion der einzelnen Integrale neue Substitutionen nötig sind. Diese Substitutionen sind hier:

$$x = \frac{r + qy}{1 + y}; \qquad k = \frac{\beta^2}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}; \qquad \text{und} \qquad y = \beta\sqrt{1 - z^2}.$$

Darnach erhalten für die Endformel hier k und φ die Werte:

$$k = \frac{M + 3\lambda}{2\sqrt{M(2M + 3h)}};$$

$$\varphi = \arcsin\sqrt{1 - \left(\frac{M - 3\lambda}{M + 3\lambda}\right)^2 \left(\frac{r - x}{q - x}\right)^2}.$$

Die übrigen in der Formel vorkommenden Grössen haben die unter 1 angegebenen Werte.

Plötz'sche Buchdruckerei, R. Nietschmann, Halle a. S.

Fig. 1.

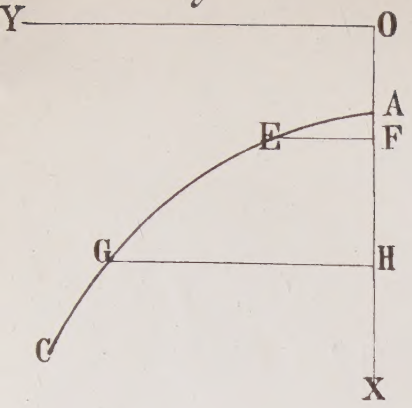

Fig. 2.

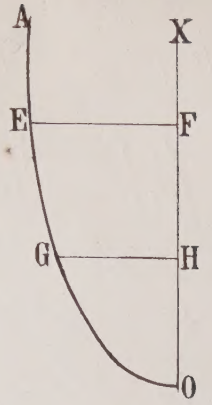

Fig. 3.

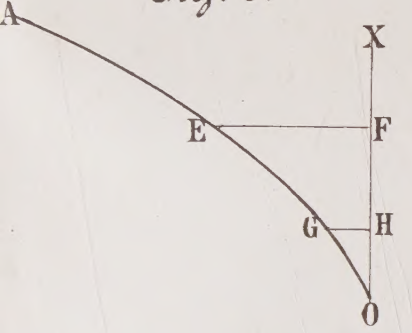

Fig. 4.

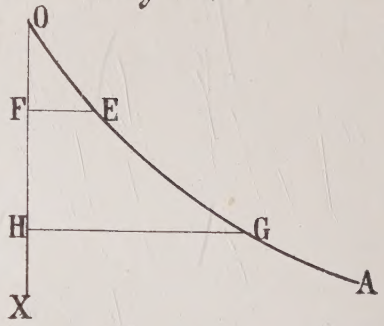

Fig. 5.

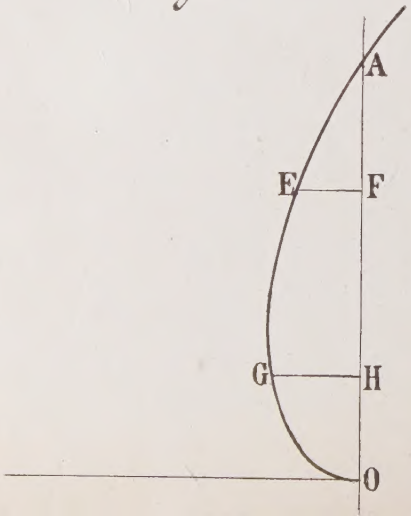

Fig. 6.

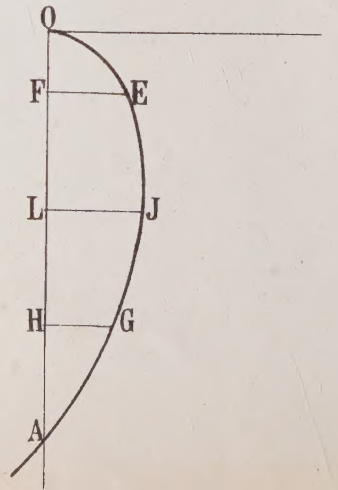

Fig. 7.

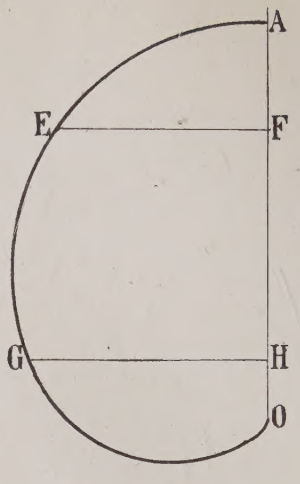

Fig. 8.

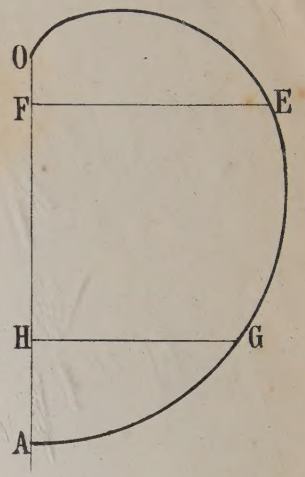

Fig. 9.

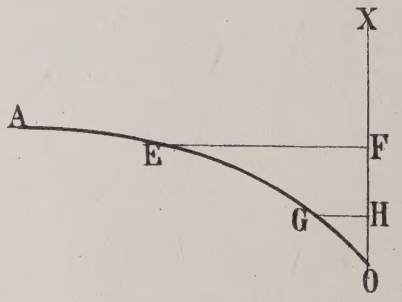
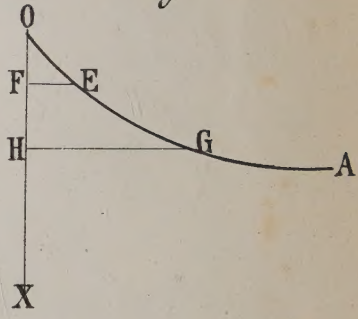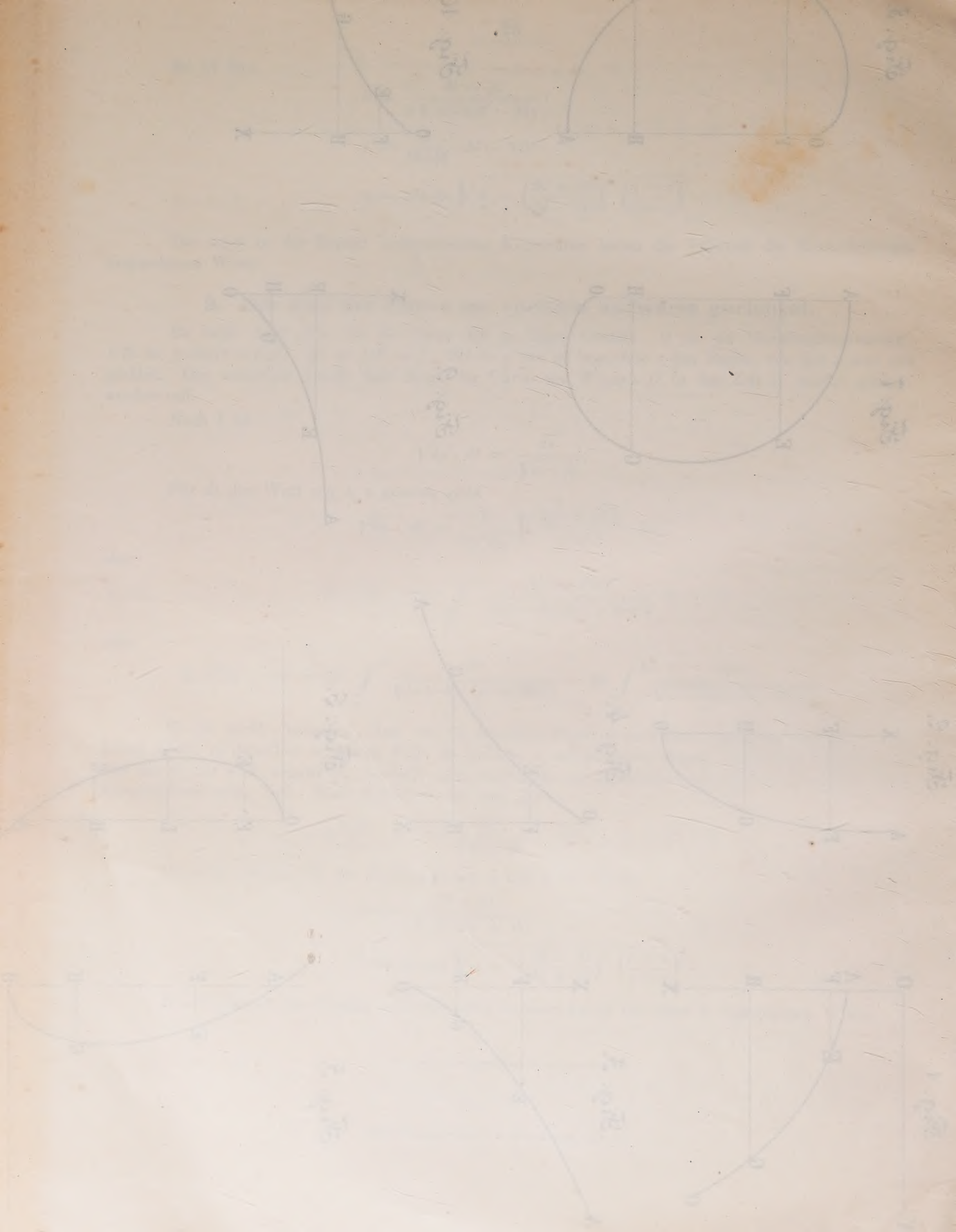
Fig. 10.